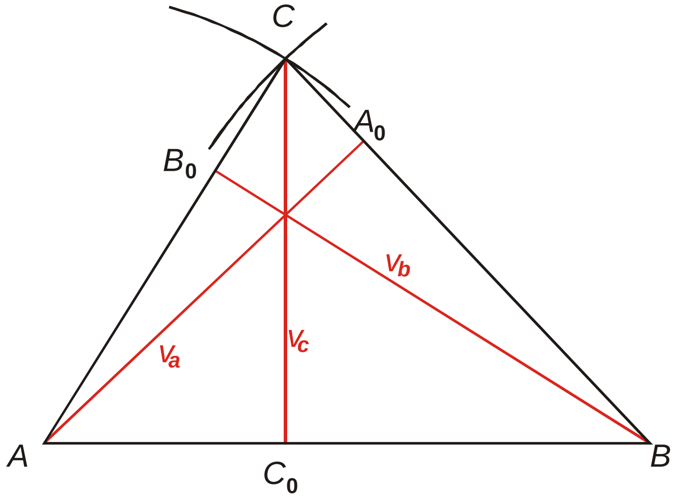
1.7.4 Výšky v trojúhelníku II

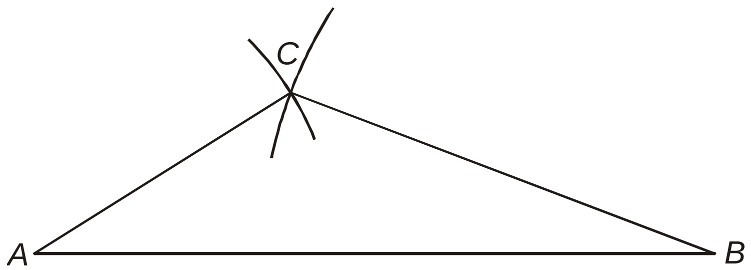
Předpoklady: 010703

Př. 1: Narýsuj libovolný trojúhelník *ABC*. Sestroj jeho výšky. Jak konstruujeme výšku? Jak výšky značíme? Najdi bod, který se označuje jako pata kolmice.

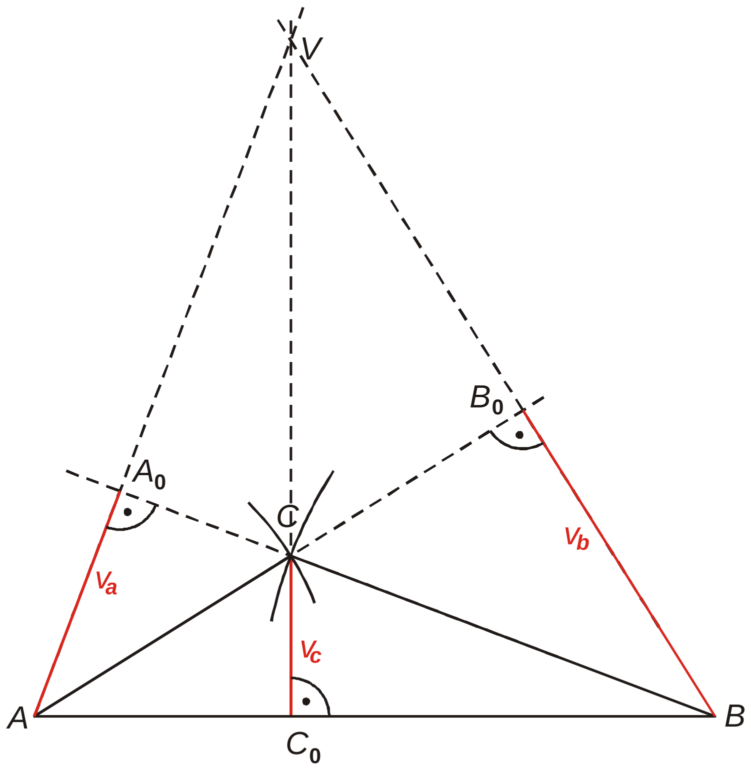
Výška trojúhelníku: úsečka, která spojuje vrchol trojúhelníku s patou kolmice na protější stranu.



Př. 2: Narýsuj trojúhelník *ABC* $c = 9\,\mathrm{cm}$, $b = 4\,\mathrm{cm}$, $a = 6\,\mathrm{cm}$. Odhadni, která z výšek bude nejdelší, která nejkratší. Poté výšky narýsuj, označ a změř jejich velikosti. Protínají se přímky, na kterých výšky leží, v jednom bodě?



Odhad délek výšek: $v_b > v_a > v_c$.

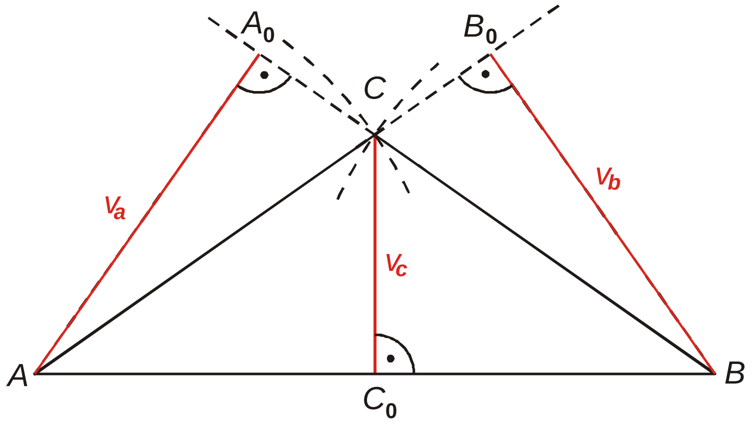


Délky výšek: $v_a = 3,2\,\text{cm}$, $v_b = 4,8\,\text{cm}$, $v_c = 2,1\,\text{cm}$.
Přímky, na kterých leží výšky se protínají v jednom bodě (označen jako *V*).

Přímky, na kterých leží výšky trojúhelníku, se protínají v jenom bodě (který většinou označujeme *V*).

Př. 3: Narýsuj libovolný rovnoramenný trojúhelník *ABC* se základnou *AB*. Které jeho výšky budou shodné? Výšky narýsuj, změř a ověř tak svůj odhad. Trojúhelník, který rýsuješ zvol tak, aby co nejméně podobný trojúhelníku, který rýsuje Tvůj soused.

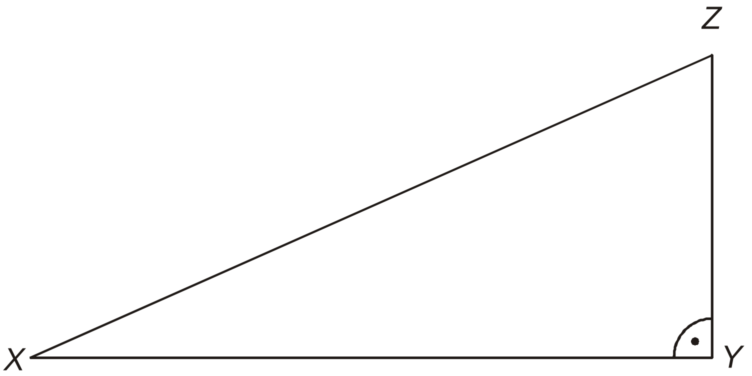
Odhad: Trojúhelník *ABC* je rovnoramenný se základnou *AB* $\Rightarrow$ rameny jsou strany *a* a *b* $\Rightarrow$ shodné budou výšky v_a a v_b (výšky kolmé na ramena trojúhelníku).



Délky výšek: $v_a = 5,2\,\text{cm}$, $v_b = 5,2\,\text{cm}$, $v_c = 3,2\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ náš předpoklad, že budou shodné výšky v_a a v_b se potvrdil.

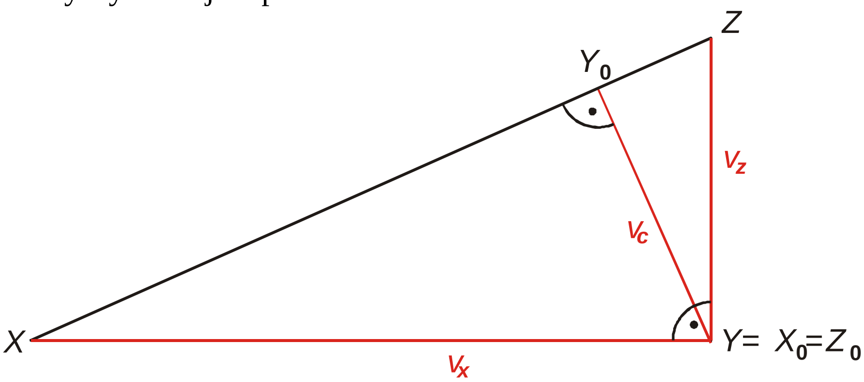
Pedagogická poznámka: Žáci samozřejmě častěji rýsují ostroúhlé trojúhelníky, což v žádném případě není na závadu.

Př. 4: Narýsuj libovolný pravoúhlý trojúhelník XYZ s pravým úhlem u vrcholu Y. Odhadni, ve kterém bodě se protnou jeho výšky. Výšky narýsuj a odhad ověř.



- Výška v_x má být kolmá na stranu YZ a procházet bodem X $\Rightarrow$ musí být shodná se stranou XY (ta je také kolmá na stranu YZ a prochází bodem X),
- výška v_z má být kolmá na stranu XY a procházet bodem Z $\Rightarrow$ musí být shodná se stranou YZ (ta je také kolmá na stranu XY a prochází bodem Z),

$\Rightarrow$ výšky se zřejmě protnou ve vrcholu Y.



Pedagogická poznámka: Největším problémem v předchozím příkladu je obava, zda výška může být zároveň stranou. Pokud se žáci přímo ptají, zda je možné, aby výška byla zároveň strana, ptám se jich, jestli to bylo někde zakázané, nebo jestli to vyplývá z vlastnosti výšek (stran). V naprosté většině případů se pak rozhodnou sami (a správně).

Př. 5: Poloha průsečíku výšek závisí na druhu trojúhelníku. Ve kterých trojúhelnících leží průsečík výšek uvnitř, ve kterých vně a ve kterých na hranici trojúhelníku?

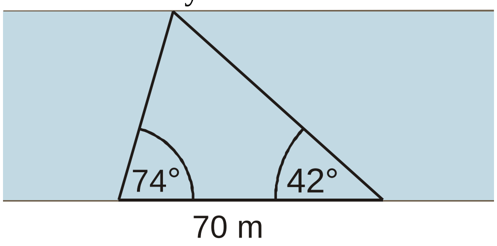
Poloha průsečíku výšek závisí na velikosti největšího vnitřního úhlu v trojúhelníku:

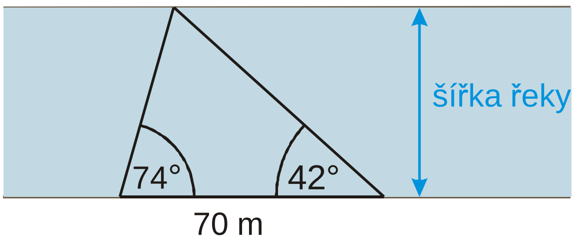
- **ostroúhlé trojúhelníky:** průsečík výšek leží uvnitř trojúhelníku,
- **pravoúhlé trojúhelníky:** průsečík výšek leží ve vrcholu, u kterého leží pravý úhel,
- **tupoúhlé trojúhelníky:** průsečík výšek leží mimo trojúhelník.

Pedagogická poznámka: Pravidlo formulují žáci sešitech teprve poté si ho ukazujeme na modelu v Geogebře.

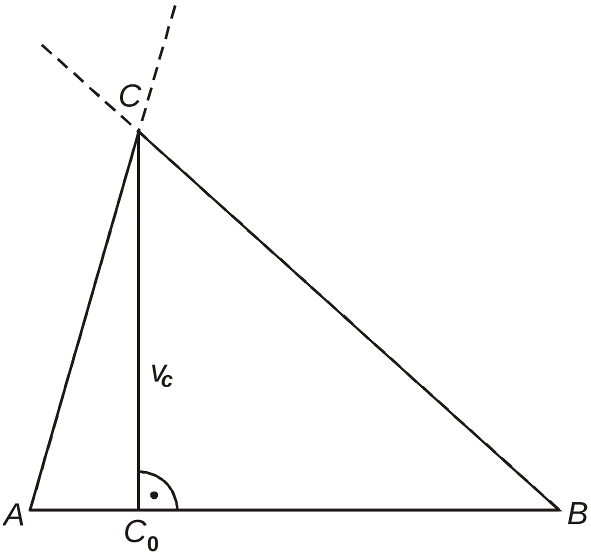
Pedagogická poznámka:

Př. 6: Měřením úhlů je možné určovat i vzdálenosti, které nemůžeme změřit přímo. Urči šířku řeky, jestliže na jedné straně řeky byla změřená vyznačená vzdálenost a dva zakreslené úhly.





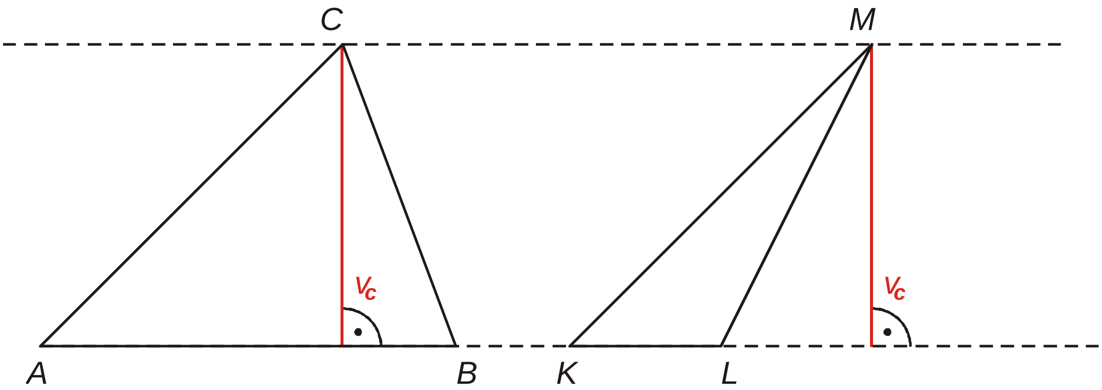
Šířka řeky odpovídá výšce trojúhelníku kolmé na změřenou stranu $\Rightarrow$ narýsujeme si zmenšený vyznačený trojúhelník, změříme výšku v přepočteme její velikost.
Rýsujeme trojúhelník *ABC´*: $c = 7\,\text{cm}$, $\alpha = 74°$, $\beta = 42°$.



Výška $v_c = 5\,\text{cm}$ $\Rightarrow$ skutečná šířka řeky je 50 m.

Př. 7: Přečti si zadání celého příkladu, rozmysli řešení (načrtni si ho) a teprve poté začni rýsovat. Narýsuj libovolný ostroúhlý trojúhelník *ABC*. Vyznač v něm výšku v_c.
Narýsuj libovolný tupoúhlý trojúhelník *KLM*, jehož výška v_m je shodná s výškou v_c trojúhelníku *ABC*.

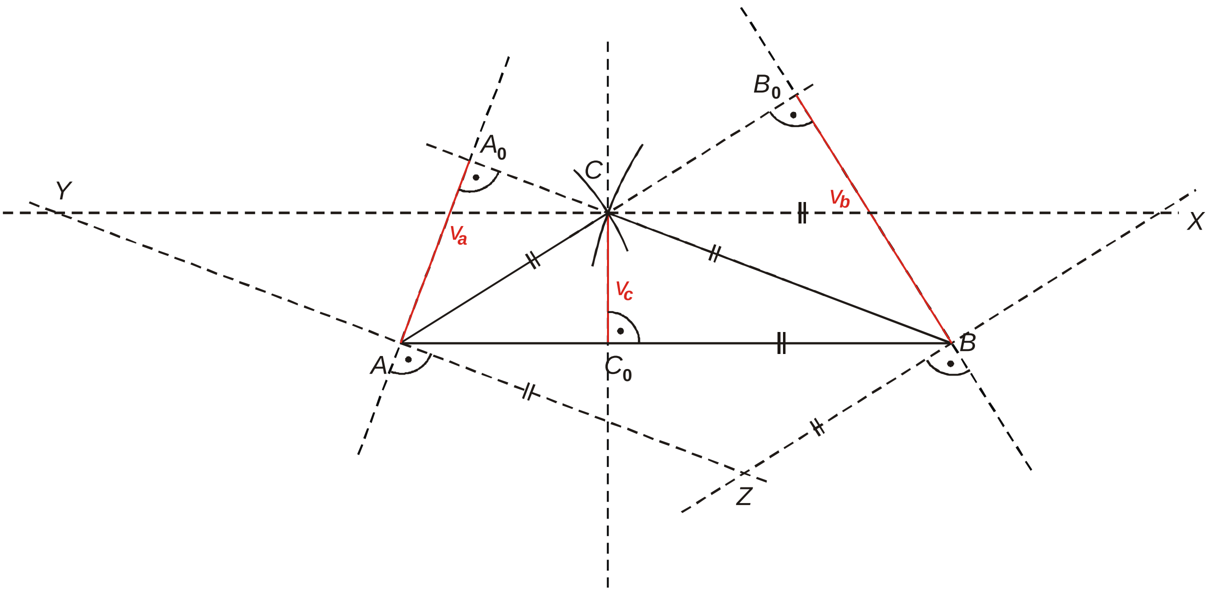
Náčrtek:



Oba trojúhelníky musí mít stejně dlouhé výšky $\Rightarrow$ stačí narýsovat oba tak, strany *AB* a *KL* ležely na stejné přímce a vrcholy *CM* na přímce s ní rovnoběžné.

Pedagogická poznámka: Následující příklad je určen zájemcům.

Př. 8: Narýsuj libovolný trojúhelník *ABC*. Sestroj všechny jeho výšky. Všemi vrcholy trojúhelníku *ABC* veď rovnoběžky s protějšími stranami trojúhelníku. Sestrojené rovnoběžky vytvoří trojúhelník *XYZ*. Jakou roli hrají přímky, na kterých leží výšky trojúhelníku *ABC* v trojúhelníku *XYZ*?



- Přímka, na které leží výška v_a je kolmá na stranu *ZY* (protože je kolmá na stranu *BC*) a prochází středem strany *YZ* (změřeno) $\Rightarrow$ jde o osu úsečky *YZ*.
- Přímka, na které leží výška v_b je kolmá na stranu *XZ* (protože je kolmá na stranu *AC*) a prochází středem strany *XZ* (změřeno) $\Rightarrow$ jde o osu úsečky *XZ*.
- Přímka, na které leží výška v_c je kolmá na stranu *XY* (protože je kolmá na stranu *AB*) a prochází středem strany *XY* (změřeno) $\Rightarrow$ jde o osu úsečky *XY*.

$\Rightarrow$ přímky na kterých leží výšky trojúhelníka *ABC* jsou osami stran trojúhelníka *XYZ*.

Pedagogická poznámka: Neočekává se, že by žáci skutečnost, že přímky procházejí středy stran trojúhelníka *XYZ* dokazovali, jde o záležitost postřehu, měření a přesnosti rýsování.

Shrnutí: Výška je úsečka spojující vrchol s patou kolmice na protější stranu.